Marius Burtea **Georgeta Burtea**
Valentin Nicula, Camelia Apostoae, Carmen Axon, Daniela Buzincu, Gheorghe Cihodariu, Elena Cimpoieru, Marilena Ciontescu, Mihaela Chiriac, Adela Dimov, Ramona Dumitru, Luiza Encuna, Gabriela Hogaş, Viorica Lazăr, Oana Leaută, Dan Maria, Daniela Mihalache, Silvia Muşătoiu, Vasile Dilimoţ Niţă, Ramona Preda, Lucia Ungureanu

CLASA a IX-a
CULEGERE DE
MATEMATICĂ
Filiera teoretică,
specializarea matematică-informatică

- funcţia de gradul I
- funcţia de gradul II
- trigonometrie
- aplicaţii ale trigonometriei în geometria plană

CAMPION

CUPRINS

Capitolul I FUNCȚIA DE GRADUL I

1 DEFINIȚIA FUNCȚIEI DE GRADUL I. REPREZENTAREA GRAFICĂ

Breviar teoretic

- Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$ se numeşte funcţie **afină**.
- Funcţia afină $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$, $a\neq 0, b\in\mathbb{R}$ se numeşte **funcţie de gradul I**.
- Funcţia afină $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=b$,$b\in\mathbb{R}$ se numeşte **funcţie constantă**.
- Intersecţia graficului funcţiei de gradul I cu axele de coordonate:

a) $\mathcal{G}_f\cap Ox$: Se rezolvă ecuaţia $ax+b=0, a\neq 0$ şi se obţine $x=\frac{-b}{a}$. Rezultă că

$\mathcal{G}_f\cap Ox=\left\{A(-\frac{b}{a},0)\right\}$.

b) $\mathcal{G}_f\cap Oy$: Se dă lui x valoarea zero şi se calculeze $f(0)=b$. Se obţine:

$\mathcal{G}_f\cap Oy=\{B(0,b)\}$

- Reprezentarea geometrică $\mathcal{G}_f$ a graficului funcţiei de gradul I este o dreaptă. Pentru a obţine curba $\mathcal{G}_f$ se poate proceda în două moduri:

1) Se determină intersecţiile graficului funcţiei cu axele de coordonate. Se obţin punctele $A(-\frac{b}{a},0), B(0,b)$, se reprezintă punctele în plan, iar $\mathcal{G}_f=AB$.

2) Se determină două puncte ale curbei $\mathcal{G}_f$, altele decât punctele de intersecţie cu axele de coordonate. Se atribuie lui x două valori la alegere şi se calculează valorile corespunzătoare ale funcţiei. Se obţin două puncte $A(x_1,f(x_1))$ şi $B(x_2,f(x_2))$, iar graficul funcţiei este reprezentat de dreapta AB.

- Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval de numere reale, $I\neq\mathbb{R}$.

Funcţia $g:I\to\mathbb{R}, g(x)=ax+b, a\neq 0$ este o restricţie a funcţiei de gradul I $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b, a\neq 0$. Graficul funcţiei g este un segment de dreaptă dacă I este un interval mărginit sau este o semidreaptă dacă I este un interval nemărginit.

Exerciţii şi probleme rezolvate

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+5, a\in\mathbb{R}^*$. Să se determine a ştiind că:

a) $A(-2,1)\in\mathcal{G}_f$, b) $A(a-2,8)\in\mathcal{G}_f$.

a) Condiţia $A(-2,1)\in\mathcal{G}_f$ este echivalentă cu $f(-2)=1$. Dar $f(-2)=a(-2)+5=-2a+5$. Rezultă că $-2a+5=1$, ecuaţie din care se obţine $a=2$.

b) Condiţia $A(a-2,8)\in\mathcal{G}_f$ este echivalentă cu $f(a-2)=8$ adică $a(a-2)+5=8$. Se obţine ecuaţie de gradul doi $a^2-2a-3=0$, cu $\Delta=16$ şi soluţiile $a_1=-1$, $a_2=3$.

2. Se consideră funcţia de gradul I, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+6$.

a) Să se determine punctele de intersecţie ale graficului funcţiei cu axele O_x şi O_y.

b) Să se reprezinte grafic funcţia.

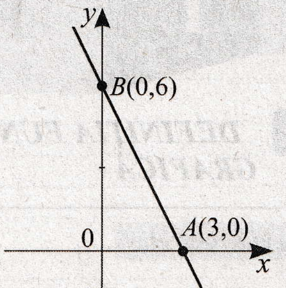

Fig. 1

a) $\mathcal{G}_f \cap O_x$: $f(x)=0 \Rightarrow -2x+6=0 \Rightarrow x=3$. Rezultă că $\mathcal{G}_f \cap O_x=\{A(3,0)\}$.

$\mathcal{G}_f \cap O_y$: $x=0, f(0)=6$. Se obţine $\mathcal{G}_f \cap O_y=\{B(0,6)\}$.

b) Se reprezintă în reperul cartezian xOy punctele A şi B determinate la a) şi se trasează curba $\mathcal{G}_f = AB$. (fig. 1)

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+2$. Să se traseze curba $\mathcal{G}_f$ folosind două puncte ale acesteia diferite de intresecţiile cu axele de coordonate.

Completăm un tabel de valori dând lui x două valori la alegere:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$		-2	6	

Pentru $x=-1 \Rightarrow f(-1)=-2 \Rightarrow A(-1,-2)$.

Pentru $x=1 \Rightarrow f(1)=6 \Rightarrow A(1,6)$.

Curba $\mathcal{G}_f$ este dreapta AB (fig. 2)

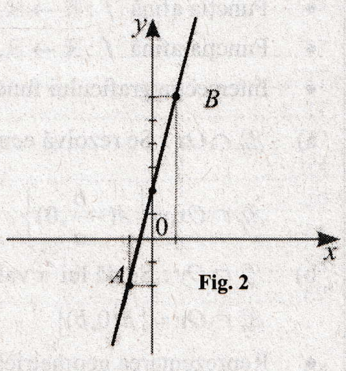

Fig. 2

4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+5$.

a) Să se traseze curba $\mathcal{G}_f$.

b) Să se calculeze aria suprafeţei plane limitate de axele de coordonate şi curba $\mathcal{G}_f$.

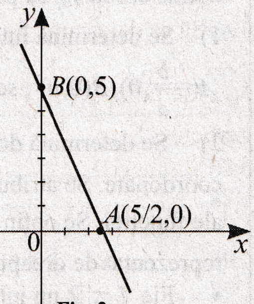

Fig. 3

a) Determinăm intresecţiile curbei $\mathcal{G}_f$ cu axele de coordonate: $\mathcal{G}_f \cap O_x$:

$$f(x)=0 \Rightarrow -2x+5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \Rightarrow \mathcal{G}_f \cap Ox=\left\{B(\frac{5}{2},0)\right\}.$$

$\mathcal{G}_f \cap O_y$: $x=0, f(0)=5 \Rightarrow \mathcal{G}_f \cap O_y=\{B(0,5)\}$.

Se reprezintă punctele A şi B în plan şi se trasează dreapta $AB=\mathcal{G}_f$ (fig. 3)

b) Suprafaţa delimitată de axele de coordonate si $\mathcal{G}_f$ este suprafaţa triunghiulară AOB. Triunghiul AOB este dreptunghic şi aria suprafeţei $[AOB]$ este: $A_{[AOB]}=\dfrac{AO\cdot OB}{2}=\dfrac{\frac{5}{2}\cdot 5}{2}=\dfrac{25}{4}$. (unităţi de arie).

5. Se consideră functia $f:[-3,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=-x+2$. Să se traseze graficul funcţiei f.

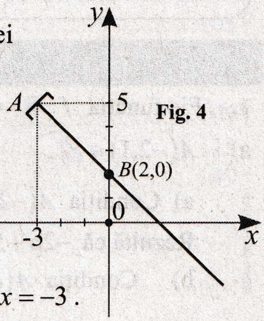

Fig. 4

Graficul funcţiei f este o semidreaptă. Determinăm două puncte de pe ea şi apoi o trasăm. Originea semidreptei se obţine pentru $x=-3$.

Rezultă $f(-3)=5$ şi originea semidreptei este $A(-3,5)$. Dăm lui x valoarea $0\in[-3,\infty)$. Rezultă că $f(0)=2$ şi se obţine punctul $B(0,2)$. Graficul funcţiei f este semidreapta $[AB$ redată în figura 4.

6. Să se reprezinte grafic funcţia: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}-x+2, x\le 0\\ 2 \quad ,x>0\end{cases}$.

Alcătuim tabelul de valori:

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$
$f(x)=-x+2$		3	$2\,]$	//////	//////	//////
$f(x)=2$	//////	//////	$(\,2$	2	2	

Reprezentăm în reperul cartezian xOy punctele cu coordonatele $(-1,3),(0,2),(1,2),(3,2)$. Curba $\mathscr{G}_f$ este trasată în figura 5.

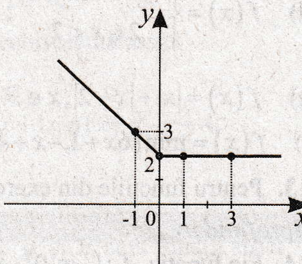

Fig. 5

Exerciţii şi probleme propuse

Exersare

1. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$ ştiind că: $f(-1)=2$ şi $f(3)=-4$.

2. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$ ştiind că punctele $A(-5,-5)$ şi $B(2,9)\in\mathscr{G}_f$.

3. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$ ştiind că graficul său intersectează axele de cordonate în punctele $A(-2,0)$ şi $B(0,2)$.

4. Să se determine funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}ax+b, x\le 1\\ -bx+a, x>1\end{cases}$ ştiind că $f(0)=4$ şi $f(3)=-1$.

5. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+1$. Care din punctele $A(0,1), B(-3,7), C(2,3)$ aparţin graficului?

6. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-2$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctul $A(m+1,-2m-4)\in G_f$.

7. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m-1)x-2m+1, m\in\mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât $A(-1,3)\in\mathscr{G}_f$.

8. Să se determine funcţia $f:\mathrm{D}\to\mathbb{R}, \mathrm{D}\subseteq\mathbb{R}$ al cărei grafic este segmentul $[AB]$, unde $A(-4,1)$ şi $B(5,-8)$.

9. Să se determine funcţia $\mathrm{D}\to\mathbb{R}, \mathrm{D}\subseteq\mathbb{R}$, al cărui grafic este reuniunea segmentului $[AB]$ şi $[AC]$, unde $A(3,-1), B(2,5)$ şi $C(7,3)$.

10. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2ax-b$ şi $g(x)=-x+3b$. Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(2,-1)\in\mathscr{G}_f\cap\mathscr{G}_g$.

11. Fie familia de funcţii $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f_m(x)=(-m+3)x+2m-1, m\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine m astfel încât funcţia f_m să fie constantă;

b) Să se arate că graficele funcţiilor f_m trec printr-un punct fix.

12. Să se traseze graficele următoarelor funcții :

a) $f(x)=3x-1, x\in\mathbb{R}$; b) $f(x)=-\sqrt{2}x+1, x\in(-\infty,0]$; c) $f(x)=3x, x\in[1,+\infty)$;

d) $f(x)=\begin{cases}-3x+6, x\geq 2\\ 2x, x<2\end{cases}$; e) $f(x)\begin{cases}-x+1, x<1\\ 9, 1\leq x<3\\ 3x, x\geq 3\end{cases}$; f) $f(x)=|-2x+1|, x\in\mathbb{R}$;

g) $f(x)=|x|+|x-2|, x\in\mathbb{R}$; h) $f(x)=\max(-x+1,3x), x\in\mathbb{R}$;

i) $f(x)=\min(6x+1,-x+4), x\in\mathbb{R}$; j) $f(x)=[2x]+3, x\in[0,2]$.

13. Pentru funcțiile din exercițiul 12 , să se rezolve ecuația $f(x)=m$, folosind și metoda grafică.

Aprofundare

14. Fie funcția $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}, f(x)=x+m-1, m\in\mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât graficul său să nu intersecteze axa Ox.

15. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-2x+3$.

a) Să se reprezinte geometric graficul funcției;

b) Folosind, eventual, punctul a) să se determine $f((-4,5])$.

16. Fie funcția $f:\mathrm{D}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+2$. Să se determine D astfel încât $\operatorname{Im} f=[-3,0]$.

17. Să se determine funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$, știind că $f(1)=1$ și $f(n+1)=f(n)+1, \forall n\geq 1$.

18. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, astfel încât $f(x+1)\leq x\leq f(x)+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

(*Exerciții și probleme de matematică clasa a IX-a RMT-editura Bîrchi*)

19. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+3$. Există $x\in\mathbb{Z}$ astfel încât $f(x)$ să fie pătrat perfect?

TEMĂ DE STUDIU :
*Utilizați programul informatic **GeoGebra** pentru rezolvarea problemei 12.*

2 MONOTONIA FUNCȚIEI DE GRADUL I

Breviar teoretic

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a\neq 0,\ a,b\in\mathbb{R}$.

a) Dacă $a>0$, funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Dacă $a<0$, funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

Exerciții și probleme rezolvate

1. Să se precizeze monotonia funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin:

a) $f(x)=-\sqrt{2}x+3$; b) $f(x)=\frac{2}{5}x$; c) $f(x)=(m-1)x+2,\ m\neq 1$.

a) $a=-\sqrt{2}<0$. Rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) $a=\frac{2}{5}>0$. Rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) $a=m-1$. Dacă $m-1>0$, adică $m\in(1,+\infty)$, funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Dacă $m-1<0$, adică $m\in(-\infty,1)$, funcţia f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m^2-4)x+1,\ m\in\mathbb{R}$.

Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

Punem condiţia ca $m^2-4<0$. Inegalitatea se scrie sub formă echivalentă astfel: $m^2<4\Leftrightarrow|m|<2\Leftrightarrow m\in(-2,2)$.

3. Se consideră funcţiile $f, g, h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-1,\ g(x)=-2x+1,\ h(x)=-x+4$.

a) Să se precizeze monotonia funcţiilor f, g, h.

b) Să se precizeze monotonia funcţiilor $f\circ g$ şi $g\circ h$.

a) f este funcţie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ ($a=3>0$). Funcţiile g şi h sunt funcţii strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ ($a<0$). b) Avem $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ (f\circ g)(x)=f(g(x))=-6x+2$. Această funcţie este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ ($a=-6<0$). Funcţia $g\circ h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(g\circ h)(x)=2x-7$ este funcţie strict crescătoare ($a=2>0$).

4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m-1)x+m^2-9,\ m\neq1$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ ştiind că f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ şi graficul funcţiei conţine punctul $A(0,7)$.

Deoarece f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, rezultă că $m-1<0$, adică $m\in(-\infty,1)$. Din condiţia $A(0,7)\in\mathcal{G}_f$ rezultă că $f(0)=7$, adică $m^2-9=7$. Se obţine $m\in\{-4,4\}$. Corelând cu prima condiţie se obţine soluţia $m=-4$.

5. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m^2-5)(x-1)^2+(x+1)^2+3mx,\ m\in\mathbb{R}$.

Să se studieze monotonia funcţiei f ştiind că f este funcţie de gradul I.

Legea de corespondenţă a funcţiei f este $f(x)=(m^2-4)x^2+(-2m^2+3m+12)x+m^2-4$. Deoarece f este funcţie de gradul *I* rezultă că $m^2-4=0$ şi $(-2m^2+3m+12)\neq0$. Se obţine $m\in\{-2,2\}$.

Pentru $m=2$, avem funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=10x$, funcţie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Pentru $m=-2$, avem funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(\ )=-2x$, funcţie strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

Exerciţii şi probleme propuse

Exersare

1. Precizaţi monotonia funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin:

a) $f(x)=3x+7$; b) $f(x)=6x-2$;

c) $f(x)=(x-1)^2-(7-x)^2$; d) $f(x)=2(x-3)^2+(2-x)(2x-1)$;

e) $f(x)=(x+1)^3-(x-1)^3-6(x+1)(x-4)$; f) $f(x)=\dfrac{2x^3+2}{x^2-x+1}$.

2. Studiaţi monotonia funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin :

a) $f(x)=\dfrac{1}{m-3}x+5,\ m\in\mathbb{R}-\{3\}$; b) $f(x)=(m^2-4m+3)x+5$;

c) $f(x)=\dfrac{m+2}{m-2}x+7, m\in\mathbb{R}-\{2\}$; d) $f(x)=\dfrac{2m-1}{3-m}x+4, m\in\mathbb{R}-\{3\}$;

e) $f(x)=(m^3-1)x+m$; f) $f(x)=\frac{m^2-4}{m-2}x+m+1, m\in\mathbb{R}-\{2\}$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-2)x+3m$. Studiați monotonia funcției f, în cazurile:

a) $f(-1)\le f(1)$; b) $f(-5)\ge f(3)$; c) $f(m)<f(6-m)$; d) $f(m)\le f(m^2)$.

4. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m^2-5m+3)(x-2)^2+(x+3)^2-5mx,\ m\in\mathbb{R}$.

a) Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie o funcție de gradul I.

b) Pentru m aflat la punctul a) studiați monotonia funcției f.

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-3)x+2$.

a) Dacă f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(m-1,3m-1)$ să aparțină graficului funcției f.

b) Determinați $m\in\mathbb{Z}-\{1\}$ astfel încât $f\left(\frac{m-4}{m-1}\right)\in\mathbb{Z}$.

Aprofundare

6. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{m-5}{m+2}x-3m,\ m\in\mathbb{R}-\{-2\}$.

a) Dacă f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât punctul $A\left((m+2)^2,\ 4m-26\right)$ să aparțină graficului funcției f.

b) Determinați $m\in\mathbb{N}$ astfel încât ecuația $f(x)=-2m$ să admită soluții întregi.

7. Se dau funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Studiați monotonia funcțiilor $f\circ f,\ g\circ g, f\circ g$ și $g\circ f$ în cazurile :

a) $f(x)=3x+1,\ g(x)=4x-3$; b) $f(x)=-x+3,\ g(x)=3x+4$;

c) $f(x)=2x+3,\ g(x)=-3x-1$; d) $f(x)=-4x+1,\ g(x)=-5x+6$.

8. Demonstrați că dacă f este o funcție de gradul I, atunci $f\circ f$ este strict crescătoare.

9. Fie funcțiile $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+3,\ g(x)=-5x+4,\ h(x)=(m^2-1)x+9$ poziția $m\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

a) Precizați și discutați în funcție de m monotonia funcțiilor f,g,h.

b) Precizați și discutați în funcție de m monotonia funcțiilor $f\circ h,\ h\circ g$.

Dezvoltare

10. Determinați intervalele de monotonie pentru funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

a) $f(x)=\begin{cases}2x-3, & x>1\\ 4x+1, & x\le 1\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}3x-2, & x\le 3\\ 2x+3, & x>3\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases}-4x+1, & x<0\\ -2x-3, & x\ge 0\end{cases}$; d) $f(x)=\begin{cases}-7x+1, & x<2\\ -x+5, & x\ge 2\end{cases}$.

11. Determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x<1\\ a, & x=1\\ x+5, & x>1\end{cases}$ să fie crescătoare pe $\mathbb{R}$.

12. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-2x+3, & x<-2\\ a, & x\in[-2,3]\\ -x+3, & x>3\end{cases}$ să fie descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

13. Să se determine toate valorile lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\le 1\\ -mx+m+1, & x>1\end{cases}$ este monotonă pe $\mathbb{R}$. (Universitatea Politehnică Timişoara, 2004)

14. Fie funția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}(4m+2)x+5, & x\le 1\\ (7-3m)x+9, & x>1\end{cases}$.

a) Determinați $m\in\mathbb{R}$, astfel încât f să fie crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Determinați $m\in\mathbb{R}$, astfel încât $f(1)$ să fie valoarea maximă a funcției.

15. Să se determine toate valorile reale ale lui m, pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3x+m, & x\le 1\\ (m-2)x+m-5, & x>1\end{cases}$ să fie crescătoare pe $\mathbb{R}$.

16. Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le 0\\ 3x+4, & x>0\end{cases}$ și $g(x)=\begin{cases}-x+7, & x<1\\ -2x-3, & x\ge 1\end{cases}$. Precizați monotonia funcției $f\circ g$.

17. Determinați monotonia funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația:

a) $xf(2-x)+(x+1)f(x+2)=8x+3, \forall x\in\mathbb{R}$; b) $3f(x)+2f(1-x)=4x+6, \forall x\in\mathbb{R}$.

18. Precizați monotonia funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care verifică inegalitățile:

a) $f(3x+4)\le 3x\le f(3x)+4, \forall x\in\mathbb{R}$; b) $f\left(x+\frac{1}{4}\right)\le 4x\le f(x)+1, \forall x\in\mathbb{R}$.

19. Determinați monotonia funcțiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, știind că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ au loc relațiile:

a) $f(x+3)-g(2x-1)=4x+3, f\left(\frac{x+3}{2}\right)+g(x-2)=8x+7$;

b) $3f(x+2)-g(3x-1)=2x-5, f(5-x)+2g(8-3x)=7x+6$;

c) $f(x+4)+3g(2x+13)=x-8, 2f\left(\frac{x}{2}\right)+g(x+5)=\frac{x}{2}+6$.

20. Determinați numerele $a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{R}$, pentru care $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x+a, & x\le -1\\ ax+b, & x>-1\end{cases}$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$ și graficul ei trece prin punctul $A(b,a+1)$.

21. Studiați monotonia funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}-\frac{a}{c}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}\right)x+abc$, $a,b,c\in\mathbb{R}^*$ distincte două câte două.

b) $f(x)=\left(1-\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b+c}-\frac{c}{c+a}\right)x+1$, $a,b,c>0$.

c) $f(x)=\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}-\frac{a+b+c}{2}\right)x+2017$, $a,b,c>0$ distincte două câte două.